# Fonctions zêta, fonctions L et valeurs spéciales

Mattia Cavicchi (Lecteur Hadamard)

Journées de Rentrée des Masters de Maths, 1er Septembre 2022

Fonctions zêta

# Fonctions zêta : l'unité des mathématiques

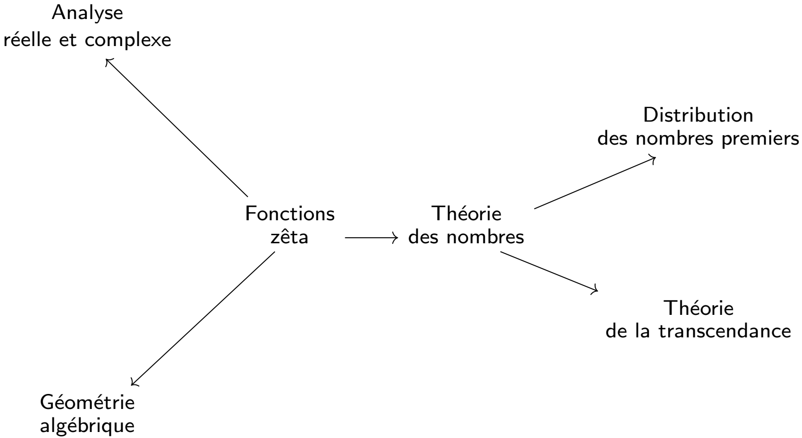
Analyse
réelle et complexe

Fonctions
zêta

# Fonctions zêta : l'unité des mathématiques

$$
\begin{tikzcd}
\text{Analyse réelle et complexe} & & \\
& \text{Fonctions zêta} \arrow[ul] \arrow[r] \arrow[dl] & \text{Théorie des nombres} \\
\text{Géométrie algébrique} & &
\end{tikzcd}
$$

# Fonctions zêta : l'unité des mathématiques



# Séries de puissances inverses

## Divergence de la série harmonique

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n} = +\infty$$

## Convergence des séries de puissances inverses $s$-iémes, $s > 1$

$$\text{si } s > 1, \text{ alors } \lim_{i \to \infty} \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^s} < +\infty$$

(par comparaison série-intégrale)

# Séries de puissances inverses

## Divergence de la série harmonique

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n} = +\infty$$

## Convergence des séries de puissances inverses $s$-iémes, $s > 1$

$$\text{si } s > 1, \text{ alors } \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^s} < +\infty$$

(par comparaison série-intégrale)

## Problème de Bâle : $s = 2$ (Pietro Mengoli, Bologne, 1650)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$$

# 18ème siècle : Euler et le problème de Bâle

### Solution du problème de Bâle (Leonhard Euler, Saint Petersbourg, 1735)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

### Idée de preuve

On considère l'expansion

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n\geqslant 1}^{+\infty} (1 - \frac{x^2}{n^2})$$

On développe en série de Taylor à gauche, et on compare les coefficients de $x^2$ aux deux cotés.

**Solution du problème de Bâle généralisé
(Leonhard Euler, Saint Petersbourg, 1735)**

Pour $k$ entier $\geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2(2k)!} \cdot B_{2k} \cdot (2\pi)^{2k}$$

$$\text{où } \frac{t}{e^t - 1} = 1 + \sum_{k \geqslant 1} B_k \frac{t^k}{k!}$$

($B_k \in \mathbb{Q}$ est appelé le $k$-ième **nombre de Bernoulli**)

### Produit eulérien

Pour $s > 1$, en dénotant $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

où le produit à droite converge absolument.

### Corollaire

En prénant $s \to 1$, la divergence de la série harmonique implique l'**infinité des nombres premiers**

**Fonction de compte des nombres premiers**

Pour tout $x$ réel,

$$\pi(x) := \sharp\{p \text{ premier tq } p \leqslant x\}$$

**Fonction de compte des nombres premiers**

Pour tout $x$ réel,

$$\pi(x) := \sharp\{p \text{ premier tq } p \leqslant x\}$$

**Idée de Riemann** : étudier $\pi(x)$ à travers

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour $s$ un **nombre complexe**, $\Re(s) > 1$

# 19ème siècle : Riemann et la fonction zêta

*Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée*, Bernhard Riemann, 1859

1. Définition de la **fonction zêta** $\zeta(s)$, qui converge absolument et uniformement pour $\Re(s) > 1$ vers une **fonction holomorphe**

   Diverge pour $s = 1$ (série harmonique)

2. $\zeta(s)$ se prolonge à une **fonction méromorphe** sur $\Re(s) > 0$

   A un seul pôle (simple) en $s = 1$

3. $\zeta(s)$ se prolonge à une fonction méromorphe sur tout $\mathbb{C}$

   Vérifie l'**équation fonctionnelle**

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s), \text{ où } \Gamma(s) := \int_0^\infty t^s e^{-t}\frac{dt}{t}$$

4. $\zeta(s)$ a un zéro simple en $s = -n$ pour tout entier $n > 0$ pair (**zéros triviaux**)

   N'a pas d'autres zéros en déhors de $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$

# 19ème siècle : Riemann et la fonction zêta

*Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée*, Bernhard Riemann, 1859

1. "Formule explicite" pour $\pi(x)$ en termes des zéros de $\zeta(s)$ dans $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$ (**zéros critiques**)
2. **Hypothèse de Riemann** : tous les zéros critiques sont sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$

# 19ème siècle : Riemann et la fonction zêta

*Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée*, Bernhard Riemann, 1859

1. "Formule explicite" pour $\pi(x)$ en termes des zéros de $\zeta(s)$ dans $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$ (**zéros critiques**)
2. **Hypothèse de Riemann** : tous les zéros critiques sont sur la droite $\Re(s) = \frac{1}{2}$

Théorème des nombres premiers, Hadamard - de la Vallée Poussin, 1896

On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

Observations

1. La preuve utilise de manière essentielle le fait que $\zeta(s) \neq 0$ si $\Re(s) = 1$ (Hadamard - de la Vallée Poussin)
2. Si l'hypothèse de Riemann était vraie, on obtiendrait la **meilleure approximation connue** pour $\pi(x)$

# 20ème siècle-21ème siècle : valeurs spéciales de $\zeta(s)$

## 20ème siècle-21ème siècle : valeurs spéciales de $\zeta(s)$

### Observation

Pour $k$ entier positif, $\zeta(2k) = q\pi^{2k}$ avec $q \in \mathbb{Q}$

$\pi$ (donc $\pi^{2k}$ pour tout $k$) est un **nombre transcendant** (Lindemann 1882) c'est-à-dire, il n'existe pas $n \in \mathbb{N}$, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, tels que $P(\pi) = 0$

### Question

Quoi dire de $\zeta(2k+1)$ pour $k$ entier positif ? On s'attend à

$$\zeta(2k+1) = r \cdot \rho$$

avec $r \in \mathbb{Q}$, $\rho$ transcendent, et à une "interprétation arithmétique" de $r$ et $\rho$.

### Observation

Pour $k$ entier positif, $\zeta(2k) = q\pi^{2k}$ avec $q \in \mathbb{Q}$

$\pi$ (donc $\pi^{2k}$ pour tout $k$) est un **nombre transcendant** (Lindemann 1882)
c'est-à-dire, il n'existe pas $n \in \mathbb{N}$, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Q}$, tels que $P(\pi) = 0$

### Question

Quoi dire de $\zeta(2k+1)$ pour $k$ entier positif ? On s'attend à

$$\zeta(2k+1) = r \cdot \rho$$

avec $r \in \mathbb{Q}$, $\rho$ transcendent, et à une "interprétation arithmétique" de $r$ et $\rho$.

### Conjecture d'**indépendence algébrique** de $\pi$ et $\zeta(2k+1)$

Il n'existe pas $k \in \mathbb{N}$, $P(x_0, \cdots, x_k) \in \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_k]$,
tels que $P(\pi, \zeta(3), \cdots, \zeta(2k+1)) = 0$

### Quelques résultats

1. $\zeta(3)$ est irrationnel (Apéry 1978)
2. Une infinité de valeurs $\zeta(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, sont irrationnels (Ball-Rivoal 2001)

# Géométrie algébrique et $\zeta(2)$

# Géométrie algébrique et $\zeta(2)$

Pour $x$ et $y$ réels, écrivons $x \sim y$ quand $x = qy$ avec $q \in \mathbb{Q}$.

# Géométrie algébrique et $\zeta(2)$

Pour $x$ et $y$ réels, écrivons $x \sim y$ quand $x = qy$ avec $q \in \mathbb{Q}$.

**Une preuve géométrique de $\zeta(2) \sim \pi^2$**

# Géométrie algébrique et $\zeta(2)$

Pour $x$ et $y$ réels, écrivons $x \sim y$ quand $x = qy$ avec $q \in \mathbb{Q}$.

## Une preuve géométrique de $\zeta(2) \sim \pi^2$

On peut montrer que

$$\zeta(2) = \int_{1 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant 0} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{1 - t_2}$$

et que cette dernière intégrale est "motivique de type $(\mathbb{Q}(-2), \mathbb{Q}(0))$".
On applique alors :

**Théorème**.
Toute intégrale motivique de type $(\mathbb{Q}(-2), \mathbb{Q}(0))$ est un multiple rationnel de $\pi^2$.

donc $\zeta(2) \sim \pi^2$

Pour $x$ et $y$ réels, écrivons $x \sim y$ quand $x = qy$ avec $q \in \mathbb{Q}$.

### Une preuve géométrique de $\zeta(2) \sim \pi^2$

On peut montrer que

$$\zeta(2) = \int_{1 \geqslant t_1 \geqslant t_2 \geqslant 0} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{1 - t_2}$$

et que cette dernière intégrale est "motivique de type $(\mathbb{Q}(-2), \mathbb{Q}(0))$".
On applique alors :

**Théorème**.
Toute intégrale motivique de type $(\mathbb{Q}(-2), \mathbb{Q}(0))$ est un multiple rationnel de $\pi^2$.

donc $\zeta(2) \sim \pi^2$

### Ingrédients pour le théoreme

**Géométrie algébrique :** étude les espaces décrits par $\underline{P}(x_1, \cdots, x_k) = 0$,
$\underline{P}(x_1, \cdots, x_m) = 0$ famille de polynômes en $m$ variables

**Théorie des motifs :** permet de classifier et organiser les intégrales de fonctions rationnelles sur domaines sémi-algébriques

**Théorème**

Pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$, on a

$$\zeta(2k+1) \sim \pi^{2k+1} R_{2k}$$

où les $R_{2k} \in \mathbb{R}$ sont tels qu'il existe une représentation de $R_{2k}$ comme intégrale motivique de type $(\mathbb{Q}(-(2k+1)), \mathbb{Q}(0))$.

# Géométrie algébrique et valeurs spéciales de $\zeta(s)$

## Théorème

Pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$, on a

$$\zeta(2k+1) \sim \pi^{2k+1} R_{2k}$$

où les $R_{2k} \in \mathbb{R}$ sont tels qu'il existe une représentation de $R_{2k}$ comme intégrale motivique de type $(\mathbb{Q}(-(2k+1)), \mathbb{Q}(0))$.

## Observations

1. Les valeurs $R_{2k}$ ont une "interprétation arithmétique" profonde (valeurs du **régulateur de Borel**).
2. Le théorème résulte du travail de nombreux auteurs (Borel, Voevodsky, Levine, Deligne, Goncharov, ..., années '70-années 2000).
3. Pour $\zeta(2k+1)$, pas de formule intégrale motivique "du bon type" explicite connue à ce jour ! (Sauf pour $k = 1$, Brown 2016, Dupont 2018)
4. Disposer d'une formule intégrale motivique du bon type explicite pour $\zeta(2k+1)$ pourrait aider à demontrer son irrationalité.
5. Plus en général, la théorie des motifs fournit une stratégie pour demontrer la conjecture d'indépendance algébrique pour $\pi, \zeta(3), \ldots, \zeta(2k+1), \ldots$.

# Au délà de la fonction zêta : fonctions L

**Idée** : considérer une suite "arithmétiquement intéressante" $a(n) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et étudier

$$\sum_{n}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}, s \in \mathbb{C}$$

# Au délà de la fonction zêta : fonctions L

**Idée** : considérer une suite “arithmétiquement intéressante” $a(n) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et étudier

$$\sum_{n}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}, s \in \mathbb{C}$$

## Exemple : fonctions $L$ de Dirichlet

Soit $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Un **caractère de Dirichlet modulo** $m$ est une fonction non nulle $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, périodique de période $m$, multiplicative et telle que

$$\chi(x) = 0 \text{ si } \mathrm{pgcd}(x, m) \neq 1$$

Soit $\chi$ une telle fonction. La **fonction** $L$ **de Dirichlet** attachée à $\chi$ est

$$L(\chi, s) := \sum_{n}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, s \in \mathbb{C}$$

**Exemples** Si $m = 1$, $\chi = 1$ (**caractère trivial** ), on retrouve $\zeta(s)$.

Le **caractère principal** modulo $m$ est la fonction $\chi_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ définie par $\chi_0(a) = 1$ si $\mathrm{pgcd}(a, m) = 1$ et $\chi_0(a) = 0$ autrement.

## Au délà de la fonction zêta : fonctions L

### Propriétés des fonctions $L$ de Dirichlet

1. Convergence vers une fonction holomorphe dans un demi-plan complexe
2. Produit eulérien dans le demi-plan de convergence
3. Prolongement méromorphe à tout $\mathbb{C}$ avec équation fonctionnelle

### Applications

**Théorème** (Dirichlet, 1837) Si $\chi$ est un caractère de Dirichlet non trivial, alors $L(\chi, 1) \neq 0$.

Dirichlet utilise ce théorème pour montrer que pour $m \in \mathbb{N}_{>0}$ fixé et pour tout entier $a$ premier à $m$, il existe une infinité de nombres premiers $p$ tels que $p \equiv a \mod m$.

# Au délà de la fonction zêta : fonctions zêta des variétés algébriques

## Généralisations

$\zeta(s)$, $L(\chi, s)$ = cas "zéro-dimensionnel" de fonctions zêta $\zeta(X, s)$ définies pour objets géométriques $X$ de dim $> 0$

On a des conjectures profondes sur les zéros et les valeurs spéciales des $\zeta(X, s)$.

On s'attend à ce que toute $\zeta(X, s)$ ait des propriétés similaires à $\zeta(s)$ : c'est largement inconnu à ce jour.

Mais les applications sont déjà spectaculaires (comptage du nombre de solutions d'équations polynomiales sur les corps finis, dernier théorème de Fermat...)

**Merci !**