Analyse de schémas pour des équations différentielles singulières

1 Description du contexte de recherche

On se place dans l'étude d'une équation en dimension d du type

$$dX_t = (LX_t + f(X_t) + b(X_t))\, dt + dB_t$$

où L est un opérateur différentiel (dans le cas d'une EDP), f est une fonction régulière, localement Lipschitz, dissipative et à accroissement polynomial, b est une distribution généralisée dans un espace de Besov $\mathcal{B}^{\gamma}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^d)$, et B_t est un processus Gaussien de type Mouvement Brownien fractionnaire, ou un bruit blanc en temps ou espace-temps.

L'idée clé est de considérer des processus dont la régularité Hölder locale est inférieure à $1/2$ qui permettent d'obtenir un effet de "régularisation par le bruit" de ces équations singulières.

Les différents cadres décrits ici sont traités dans la littérature, mais uniquement quand un des deux termes f ou b est identiquement nul, car le cas général n'est couvert par aucune théorie. Le cadre classique (i.e. $b = 0$) est couvert par une littérature extrêmement riche qu'on ne détaillera pas ici.

Lorsque b n'est pas une fonction (i.e. $\gamma < 0$), seule des théories récentes permettent de traiter l'existence de solutions. On citera notamment les derniers résultats obtenus par Athreya, Butkovsky, Lê, Mytnik, Gerenceser, Anzeletti, Richard, Tanré, Haress dans [1, 2, 5, 13], mais aussi Nualart-Ouknine [16, 17] pour des travaux plus fondateurs avec des fonction b non régulières, et Catellier et Gubinelli [8] pour les premiers résultats avec b distributionnel.

Étant donnée l'existence de solutions à ce type d'équations, une question naturelle concerne leur approximation numérique, et l'ordre de convergence de ces approximations. On notera également le lien de ces modèles avec d'autres problèmes [4, 15, 18].

2 Pistes de recherche

Pour une équation différentielle stochastique, on peut obtenir des vitesses explicites de convergence forte d'un schéma d'Euler [5, 11], également lorsque b dépend du temps [12] sous la condition classique Krylov-Röckner dans le cas d'erreurs de type faible. Et dans le cas d'une EDP stochastique, on peut obtenir des vitesses explicites de convergence forte d'un schéma d'Euler explicite avec une méthode de différences finies [6, 10].

Les objectifs de recherche consistent à regarder des variations du modèle décrit précédemment pour lesquelles on ne possède pas encore de résultat de convergence et d'approximation. Dans les pistes possibles, on pourra traiter les cas suivants :

- Le cas d'une EDS avec f très régulière et b distribution en dimension est $d = 2$, mais le bruit est dégénéré, et n'apparaît que dans la première composante. On tombe immédiatement dans un régime de scaling de régularité locale très différent. On pourra consulter [14, 9].

- L'approximation numérique d'EDS mais dirigées par des processus de Lévy, en suite des résultats récents de Athreya, Butkovsky, Mytnik, Dareiotis et Gerenceser dans [3, 7].

- L'approximation de la convergence en ordre faible. Une question ouverte et difficile dans le cas où b est distributionnel. Les résultats récents, mais semble-t-il non optimaux, pour une approximation des densités se trouvent dans [12], ou encore dans les travaux de thèse de Mathis Fitoussi, doctorant au LaMME, dans le cas de bruits α-stables.

2.1 Objectifs

Conception et preuve de convergence de schémas numériques pour les équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles stochastiques décrites précédemment.

- Démonstration de la convergence d'algorithmes stochastiques pour les équations différentielles stochastiques

- Implémentation d'algorithmes stochastiques pour les équations différentielles stochastiques

- Estimation d'erreurs fortes

- Estimation d'erreurs faibles

2.2 Description du poste

Le candidat sera encadré par Ludovic Goudenège, Directeur de Recherche CNRS au LaMME à Évry. Il bénéficiera également des connexions avec des collaborateurs engagés dans ces pistes de recherche, notamment Stéphane Menozzi professeur au LaMME, Jonathan Naffrichoux, étudiant en thèse sous la co-direction de Charles-Edouard Bréhier (UPPA) et Ludovic Goudenège, et dans une certaine mesure avec El Mehdi Haress, post-doctorant à Leeds (UK) sous la direction de Konstantinos Dareiotis et Khoa Lê, Alexandre Richard (MCF, Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec), et Mathis Fitoussi, doctorant sous la direction de Stéphane Menozzi.

- Structures tutelles : Université Paris-Saclay, Fondation Mathématique Jacques Hadamard, CNRS.

- Accueil dans le Laboratoire de Mathématiques et de Modélisation d'Évry (LaMME).

- Localisation : Bâtiment IBGBI, 23 bvd de France à Évry (91037)

- Intégration dans l'équipe PMF (Probabilités, Mathématiques Financières) et l'équipe Analyse et EDP.

2.3 Collaborations possibles

Le candidat sera en contact avec d'autres chercheurs intéressés par ces questions :

- Charles-Edouard Bréhier (Professeur, UPPA, Pau)
- Mathis Fitoussi (doctorant, LaMME, Évry)
- El Mehdi Haress (post-doctorant, Leeds, UK)
- Stéphane Menozzi (Professeur, LaMME, Évry)
- Jonathan Naffrichoux (Doctorant, UPPA et LaMME, Pau et Évry)
- Alexandre Richard (MCF, Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec, UpSay)

References

[1] S. Anzeletti, A. Richard, and E. Tanré. Regularisation by fractional noise for one-dimensional differential equations with distributional drift. *Electronic Journal of Probability*, 28:1-41, 2023.

[2] S. Athreya, O. Butkovsky, K. Lê, and L. Mytnik. Well-posedness of stochastic heat equation with distributional drift and skew stochastic heat equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 74(12):2605-2654, 2021.

[3] S. Athreya, O. Butkovsky, and L. Mytnik. Strong existence and uniqueness for stable stochastic differential equations with distributional drift. *Annals of Probability*, 48(1):178-210, 2020.

[4] S. K. Bounebache and L. Zambotti. A skew stochastic heat equation. *Journal of Theoretical Probability*, 27:168-201, 2014.

[5] O. Butkovsky, K. Dareiotis, and M. Gerencsér. Optimal rate of convergence for approximations of SPDEs with non-regular drift. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 181:975-1034, 2021.

[6] O. Butkovsky, K. Dareiotis, and M. Gerencsér. Approximation of SDEs: a stochastic sewing approach. *Probability Theory and Related Fields*, 161(2):1103-1137, 2023.

[7] O. Butkovsky, K. Dareiotis, and M. Gerencsér. Strong rate of convergence of the Euler scheme for SDEs with irregular drift driven by Lévy noise. *Preprint*, 2024.

[8] R. Catellier and M. Gubinelli. Averaging along irregular curves and regularisation of ODEs. *Stochastic Processes and their Applications*, 126(8):2323-2366, 2016.

[9] P. E. Chaudru de Raynal, S. Menozzi, A. Pesce, and X. Zhang. Heat kernel and gradient estimates for kinetic SDEs with low regularity coefficients. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 183, 48 pp, 2023.

[10] L. Goudenège, E. M. Haress, and A. Richard. Numerical approximation of the stochastic heat equation with a distributional reaction term. *arXiv preprint*, arXiv:2405.08201, 2024.

[11] L. Goudenège, E. M. Haress, and A. Richard. Numerical approximation of SDEs with fractional noise and distributional drift. *arXiv preprint*, arXiv:2302.11455, 2023.

[12] B. Jourdain and S. Menozzi. Convergence Rate of the Euler-Maruyama Scheme Applied to Diffusion Processes with $L^Q L^\rho$ Drift Coefficient and Additive Noise. *The Annals of Applied Probability*, 34(1B), hal-03223426v2, 2024.

[13] K. Lê. A stochastic sewing lemma and applications. *Electronic Journal of Probability*, 25:Paper No. 38, 55, 2020.

[14] S. Menozzi, A. Pesce, and X. Zhang. Density and gradient estimates for non-degenerate Brownian SDEs with unbounded measurable drift. *Journal of Differential Equations*, 272:330-369, 2021.

[15] T. Nilssen. Rough linear PDEs with discontinuous coefficients – existence of solutions via regularization by fractional Brownian motion. *Electronic Journal of Probability*, 25:1-33, 2020.

[16] D. Nualart and Y. Ouknine. Regularization of differential equations by fractional noise. *Stochastic Processes and their Applications*, 102(1):103-116, 2002.

[17] D. Nualart and Y. Ouknine. Stochastic differential equations with additive fractional noise and locally unbounded drift. *Stochastic Processes and their Applications*, 106(2):327-356, 2003.

[18] L. Zambotti. A reflected stochastic heat equation as symmetric dynamics with respect to the 3-d Bessel bridge. *Journal of Functional Analysis*, 180(1):195-209, 2001.