# Transformée de Fourier et équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Journées de rentrée Fondation Mathématiques Jacques Hadamard

Corentin Kilque

31 août 2022

# Introduction

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & \text{pour } (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{EC}$$

pour une certaine donnée initiale $u_0$.

C'est l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$.

Le but est de prouver le caractère bien posé dans l'espace de Schwartz de (EC), c'est-à-dire montrer que pour toute donnée initiale $u_0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution *régulière* de (EC).

Transformée de Fourier

Unicité et formule explicite pour (EC)

Effet régularisant

# Transformée de Fourier

# Rappels

- Pour une fonction $f$ de $L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier comme la fonction $\widehat{f}$ de $L^\infty(\mathbb{R})$ définie, pour $\xi \in \mathbb{R}$, par

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx.$$

- Si la fonction $f$ est dérivable de dérivée $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{\partial_x f}(\xi) = i\xi\, \widehat{f}(\xi).$$

- Si la fonction $x \mapsto x\, f(x)$ est également dans $L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $\widehat{f}$ est dérivable, et on a

$$\widehat{x \mapsto xf(x)} = -i\partial_\xi \widehat{f}.$$

L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont toutes les dérivées décroissent à l'infini plus vite que n'importe quel polynôme.

Autrement dit, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f$ de $\mathcal{C}^\infty$ telles que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \partial_x^\beta f(x) \right| < +\infty.$$

**Exemple.** Les fonctions $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, les gaussiennes

$$x \mapsto e^{-(x-a)^2/b^2}$$

sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

## Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- La transformée de Fourier sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ s'étend en un opérateur $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même.
- L'opérateur inverse de $\mathcal{F}$ est donné par $\mathcal{F}^{-1}$ défini par

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

# Unicité et formule explicite pour (EC)

## D'une EDP à une EDO

Soit $u$ une solution régulière ($u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et $x \mapsto u(t,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $t \geqslant 0$) de (EC). Si on applique la transformée de Fourier en $x$ à l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

on obtient, pour $t \geqslant 0$,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,\xi) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(t,\xi),$$

et donc, avec le théorème de dérivation sous l'intégrale et les propriété de la transformée de Fourier,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u)(t,\xi) = -\xi^2 \mathcal{F}(u)(t,\xi).$$

À $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathcal{F}(u)(t,\xi)$ vérifie une équation différentielle ordinaire.

Puisque pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u)(t,\xi) = -\xi^2\mathcal{F}(u)(t,\xi),$$

alors

$$\mathcal{F}(u)(t,\xi) = A(\xi)\, e^{-\xi^2\, t}.$$

Pour déterminer $A$ on voit que

$$A(\xi) = \mathcal{F}(u)(0,\xi) = \mathcal{F}(x \mapsto u(0,x))(\xi) = \mathcal{F}(u_0)(\xi).$$

Ainsi, $A = \widehat{u_0}$.

On a donc

$$\mathcal{F}(u)(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)\, e^{-\xi^2\, t},$$

c'est-à-dire,

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\xi \mapsto \widehat{u_0}(\xi)\, e^{-\xi^2\, t}\Big).$$

## Formule explicite pour la solution

On a

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big(\xi \mapsto \widehat{u_0}(\xi)\, e^{-\xi^2\, t}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, e^{-iy\xi}\, dy\Big) e^{-\xi^2\, t}\, e^{i\xi x}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u_0(y)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2\, t}\, e^{-i(y-x)\,\xi}\, d\xi\Big) dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, \mathcal{F}\Big(\xi \mapsto e^{-\xi^2\, t}\Big)(y-x)\, dy \end{aligned}$$

En calculant la transformée de Fourier de la gaussienne on trouve enfin

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x-y)^2/4t}\, dy,$$

c'est-à-dire que $u$ est donné par la convolution

$$u(t,x) = \mathcal{H}_t \star u_0(x)$$

où le noyau de la chaleur $\mathcal{H}_t$ est donné par la gaussienne

$$\mathcal{H}_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-x^2/4t}.$$

# Fin de la preuve

En partant d'une solution $u$ régulière de (EC), on en a déterminé une formule explicite, il y a donc unicité de la solution.

Il faut ensuite montrer que $u(t, x) = \mathcal{H}_t \star u_0(x)$ est bien solution de (EC).

# Un peu de rigueur

Puisque $\mathcal{H}_t$ n'est défini que pour $t > 0$, la preuve doit être ajustée. On montre ainsi le résultat suivant.

**Theorem**

*Pour tout $u_0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ satisfaisant*

*(i)* $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ *pour* $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

*(ii)* $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| u(t,x) - u_0(x) \right| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$,

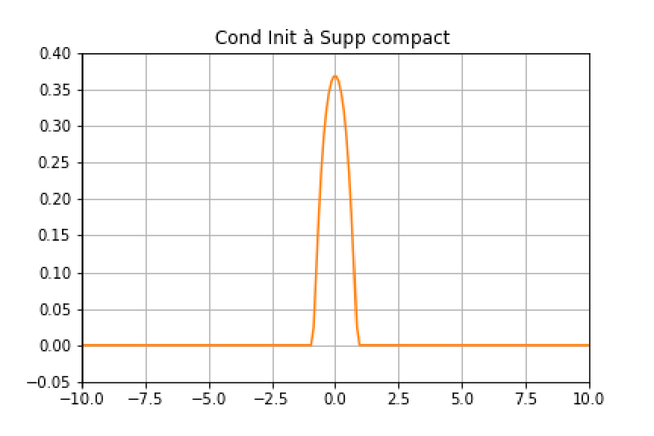
*(iii) Pour tout $T > 0$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{0<t<T} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \partial_x^\beta u(t,x) \right| < +\infty.$$

*De plus, cette solution est donnée, pour $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par*

$$u(t,x) = \mathcal{H}_t \star u_0(x).$$

# Effet de diffusion du laplacien



# Effet régularisant

Puisque le noyau de la chaleur $\mathcal{H}_t$ est régulier en $x$, par convolution, l'équation de la chaleur a un effet régularisant.