Contrôle stochastique optimal pour la gestion actif-passif

J.F. Bonnans[1], N. Frikha[2], O. Klopfenstein[3] et L. Pfeiffer[1]

[1] Ecole Polytechnique, laboratoire CMAP
[2] Université Paris VII, laboratoire LPMA
[3] EDF R&D

18 décembre 2012

Sommaire

Contexte opérationnel

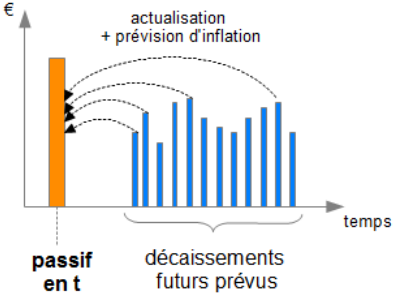
- La loi impose à EDF de constituer un portefeuille (**"actifs dédiés"**) qui doit permettre de couvrir les charges de long-terme du nucléaire
  - gestion des déchets, démantèlement des centrales

Contexte opérationnel

- La loi impose à EDF de constituer un portefeuille (**"actifs dédiés"**) qui doit permettre de couvrir les charges de long-terme du nucléaire
  - gestion des déchets, démantèlement des centrales
- **Actif :** valeur du portefeuille à un instant donné. Cette valeur évolue au cours du temps, en fonction :
  - des contributions faites au fonds,
  - des rendements des actifs financier constituant le portefeuille,
  - des choix de rebalancement du portefeuille sur les différents actifs financiers.

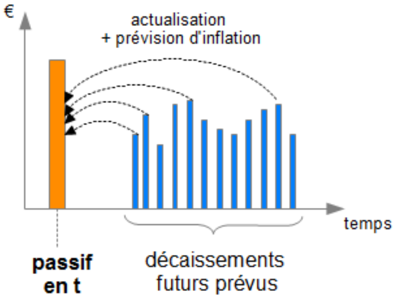
Contexte opérationnel : définition du passif

- **Passif :** valeur actualisée de l'ensemble des décaissements futurs prévus.



Contexte opérationnel : définition du passif

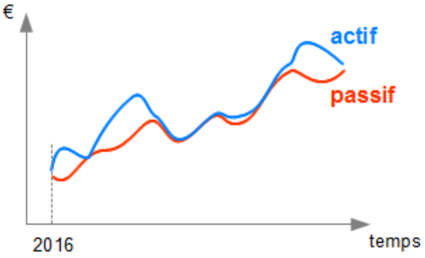
- **Passif :** valeur actualisée de l'ensemble des décaissements futurs prévus.



- Ce "passif" dépend de l'inflation future : il est donc stochastique.
  - Il dépend par ailleurs d'un taux d'actualisation, qu'on supposera ici constant.

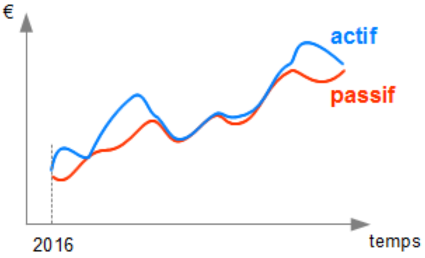
Contrainte réglementaire post-2016

- La loi impose que l'actif soit au moins égal au passif à tout moment à partir de 2016.



Contrainte réglementaire post-2016

- La loi impose que l'actif soit au moins égal au passif à tout moment à partir de 2016.



- Difficultés et risques :
  - les échéances de temps considérées rendent impossibles une réplication parfaite du passif
  - les objectifs de rendement (cf taux d'actualisation) impliquent un recours à des actifs risqués

Objectifs du projet

- But : modéliser et résoudre ce problème de gestion actif-passif, en contrôlant la probabilité d'avoir "actif $<$ passif"

Objectifs du projet

- But : modéliser et résoudre ce problème de gestion actif-passif, en contrôlant la probabilité d'avoir "actif $<$ passif"
- Intérêt de savoir caractériser des stratégies optimales :
  - possibilité de "benchmarquer" la gestion opérationnelle ;
  - possibilité d'effectuer des analyses économiques objectives relatives au coût de gestion des actifs dédiés.

Objectifs du projet

- But : modéliser et résoudre ce problème de gestion actif-passif, en contrôlant la probabilité d'avoir "actif $<$ passif"
- Intérêt de savoir caractériser des stratégies optimales :
  - possibilité de "benchmarquer" la gestion opérationnelle ;
  - possibilité d'effectuer des analyses économiques objectives relatives au coût de gestion des actifs dédiés.
- Difficultés et enjeux liés à la modélisation et à la résolution
  - besoin de modèles pertinents, mais suffisamment simples pour être analysés et exploités numériquement
  - difficulté intrinsèque liée aux contraintes en probabilité

État de l'art (sommaire)

- Différents types de travaux d'optimisation autour de la gestion actif-passif dans la littérature (cf fonds de pension)
  - programmation stochastique avec recours (arbres de scénarios)
  - contrôle stochastique optimal (approches analytiques ou algorithmiques)
- Quelques travaux assez récents sur l'ALM sous contraintes régulatoires
  - [Binsbergen and Brandt, 2007], [Detemple and Rindisbache, 2008], [Martellini and Milhau, 2009]
- Aspects spécifiques de notre contexte :
  - contrainte de couverture du passif à toute date
  - objectif économique (coût) $\neq$ fonction d'utilité
  - contraintes de risque en probabilité

Sommaire

Modélisation du portefeuille d'actif

- On suppose disposer de 2 actifs seulement :
  - actif sans risque : $dB_t = rB_t$
  - actif risqué : $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

- Première approche : modèle de Merton
  - commandes : proportion π_t d'actif risqué, contribution c_t
  - Dynamique de l'actif A_t :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t)\frac{dB_t}{B_t} + c_t dt$$

Modélisation du portefeuille d'actif

- On suppose disposer de 2 actifs seulement :
  - actif sans risque : $dB_t = rB_t$
  - actif risqué : $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$
- Première approche : modèle de Merton
  - commandes : proportion π_t d'actif risqué, contribution c_t
  - Dynamique de l'actif A_t :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t)\frac{dB_t}{B_t} + c_t dt$$

- Contraintes sur les commandes :
  - on interdit de consommer dans le portefeuille : $c_t \geq 0$
  - on interdit la vente à découvert : $\pi_t \in [0, 1]$

Problèmes potentiels de ce modèle

- Entre t et $t + dt$, l'investissement c_t est réalisé en actif sans risque : cette contrainte n'a pas de raison d'être
- Comme $\pi_t \in [0, 1]$, la volatilité du portefeuille ($\pi_t \sigma dW_t$) est bornée $\Rightarrow$ difficultés mathématiques (voir plus tard) ?

Modèle alternatif du portefeuille d'actif

- Le modèle suivant semble plus pertinent ici :

$$dA_t = (A_t + c_t) \cdot \left(\pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \right)$$

- On peut le ré-écrire ainsi :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \theta_t^B \frac{dS_t}{S_t} + \theta_t^S \frac{dB_t}{B_t}$$

Modèle alternatif du portefeuille d'actif

- Le modèle suivant semble plus pertinent ici :

$$dA_t = (A_t + c_t) \cdot \left(\pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \right)$$

- On peut le ré-écrire ainsi :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \theta_t^B \frac{dS_t}{S_t} + \theta_t^S \frac{dB_t}{B_t}$$

- Les commandes (π_t, c_t) et (θ_t^B, θ_t^S) sont reliées par :

$$\begin{cases} c_t = A_t(\theta_t^B + \theta_t^S - 1) \\ \pi_t = \theta_t^S / (\theta_t^B + \theta_t^S) \end{cases}$$

Modélisation du passif

- On modélise le passif comme un brownien géométrique :

$$dL_t = L_t\Big(\tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma}[\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} d\tilde{W}_t]\Big),$$

  - $\tilde{W}_t$ est un mouvement brownien indépendant de W_t,
  - $\rho \in [-1, 1]$ est la corrélation entre les mouvements browniens du passif et de l'actif risqué.

Modélisation du passif

- On modélise le passif comme un brownien géométrique :

$$dL_t = L_t\Big(\tilde{\mu}dt + \tilde{\sigma}[\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2}d\tilde{W}_t]\Big),$$

  - $\tilde{W}_t$ est un mouvement brownien indépendant de W_t,
  - $\rho \in [-1, 1]$ est la corrélation entre les mouvements browniens du passif et de l'actif risqué.

- Variable d'intérêt : écart actif-passif $G_t = L_t - A_t$

Contrainte de risque

- Le régulateur impose : $\forall t, A_t \geq L_t$, i.e. : $\forall t, G_t \leq 0$.
- Il n'est pas possible de garantir cette contrainte de manière certaine.

Contrainte de risque

- Le régulateur impose : $\forall t, A_t \geq L_t$, i.e. : $\forall t, G_t \leq 0$.
- Il n'est pas possible de garantir cette contrainte de manière certaine.
- Contrôle en probabilité :

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]} G_t > 0\right) \leq \varepsilon,$$

avec $\varepsilon > 0$ et proche de 0 (typiquement, $\varepsilon = 1\%$).

Limites de la contrainte en probabilité

- Une contrainte en probabilité ne permet pas de contrôler le risque dans les cas de défaillance.
- On veut également contrôler le risque extrême (CVaR) de $X = \max_{t \in [0,T]} G_t$:

$$\mathbb{E}\left[X^+\right] \leq \alpha,$$

pour un niveau $\alpha < 1$ donné.

Modèle complet

Objectif : minimiser la somme actualisée des contributions au fonds

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{\theta} & \mathbb{E}\left[\int_{t=0}^{T} e^{-\beta t} A_t(\theta_t^B + \theta_t^S - 1)dt\right] \\
\text{s.t.} & \mathbb{P}\left(X > 0\right) \leq \varepsilon \\
 & \mathbb{E}\left[X^+\right] \leq \alpha \\
 & \theta_t^B + \theta_t^S \geq 1, \ \forall t \in [0, T] \\
 & \theta^B, \theta^S \geq 0.
\end{array}
$$

- Dimension : 2 browniens + 2 commandes