

The background of the slide is a dense field of colorful soap bubbles. The bubbles are in various sizes and stages of focus, creating a bokeh effect. The colors are vibrant, including shades of blue, green, yellow, orange, and purple, reflecting light in a way that gives them a shimmering, iridescent appearance. The overall composition is soft and dreamlike.

Quelle est la forme des bulles de savon?

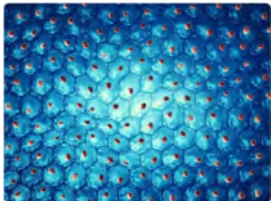
Valentina Franceschi

FMJH & IMO, Université Paris-Sud, Orsay

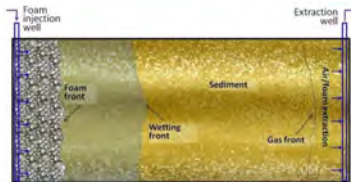
07 septembre 2018

Mousse : ensemble de bulles de savon.

Les ingénieurs, les physiciens, les biologistes les utilisent à de nombreuses fins:



Modèles de cellules biologiques



Forcer l'huile du sous-sol et nettoyer les canaux



Éteindre un feu

Mathématiques : on commence par la base!



Quelle est la forme d'une bulle de savon?



Quelle est la forme d'une bulle de savon?



Pourquoi n'a t'on pas d'autres formes?

→ *Chimistes* et *physiciens* : le but de la bulle est de contenir une quantité d'air proportionnelle à la quantité d'air qu'on souffle, **en minimisant la surface** ("la quantité de savon")!

Principe des bulles de savon :

Parmi toutes les formes \mathcal{B} avec $\text{volume}(\mathcal{B})=V$, **minimiser périmètre de \mathcal{B}**

"Nothing whatsoever takes place in the universe in which some relation of maximum and minimum does not appear" (Euler)

"Il n'y a rien qui se passe dans l'univers dans lequel une relation de maximum et de minimum n'apparaît"

Principe des bulles de savon :

Parmi toutes les formes \mathcal{B} avec $\text{volume}(\mathcal{B})=V$, minimiser périmètre de \mathcal{B}



Formalisation rigoureuse \implies *théorie géométrique de la mesure, calcul des variations.*

Sujet clé: **inégalités isopérimétriques.**

- Point de vue mathématique : concept mathématiques très complexe: décrire et étudier la *mesure de surface* des objets.
- Des grands mathématiciens ont travaillé sur le sujet, comment par exemple **F. Almgren**, **E. De Giorgi**, **J. Taylor** et aussi ...

... **Alessio Figalli**: lauréat de la **médaille Fields 2018** !

Problème de Didon : la forme de la ville Carthage



Didon Purchases Land for the Foundation of Carthage. Engraving by Matthäus Merian the Elder, in *Historische Chronica*, Frankfurt a.M., 1630. Didon's people cut the hole of an ox skin along edges and try to enclose a maximal domain.

Figure: La ville de Carthage et Didon qui découpe la peau d'un boeuf (Gravure de Mathhäus Merian the Elder, 1630).

*"Devenere locos ubi nunc ingentia cernis
Moenia sergentemque novae Karthaginis arcem,
mercaticque, solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo."*

(Virgile, *Énéide*, 29–19 av J.-C., 1er livre, versets 365–369)

*"Ils arrivèrent dans les lieux où tu verras
tout à l'heure de grands remparts et la
citadelle qui s'élève de la nouvelle
Carthage, et ils achetèrent un terrain si
grand qu'ils pouvaient l'entourer d'une
peau de taureau, terrain appelé Byrsa
du nom de ce fait."*



Problème de Didon : l'idée de Didon



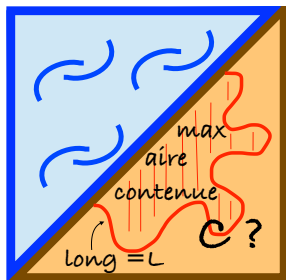
Problème de Didon : la solution de Didon

Quelle est la **forme** à donner à la *Corde* pour contenir le plus possible de terre?

Problème de Didon :

Maximiser aire contenue par C , parmi courbes C avec $\text{longueur}(C)=L$

Problème de Didon :



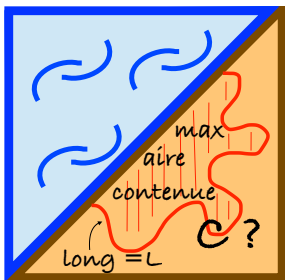
Problème de Didon : la solution de Didon

Quelle est la **forme** à donner à la Corde pour contenir le plus possible de terre?

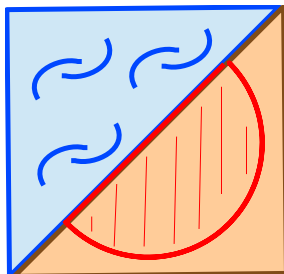
Problème de Didon :

Maximiser aire contenue par C , parmi courbes C avec $\text{longueur}(C)=L$

Problème de Didon :



Solution de Didon :



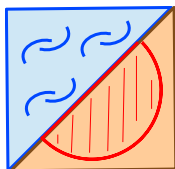
Est-ce que c'est une bonne solution?

La solution du problème isopérimétrique est la boule ronde!

Problème isopérimétrique

Problème de Didon : (2D)

$\max\{\text{Aire contenue} : \text{long.} = L\}$



Bulles de savon : (3D)

$\min\{\text{Surface} : \text{vol.} = V\}$



Problème isopérimétrique : $\min\{P(E) : \text{Vol}(E) = v > 0\}$.

La solution attendue est la boule ronde.

Pour une formalisation mathématique du problème :

volume : mesure de Lebesgue \mathcal{L}^n dans \mathbb{R}^n ;

mesure de surface d'ensembles Lebesgue mesurables ...?

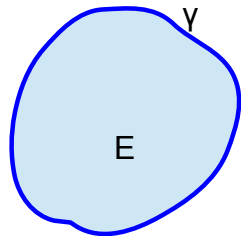
La mesure de surfaces



Cas 2D

$E \subset \mathbb{R}^2$: région entourée d'une courbe fermée
 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$\rightarrow P(E) =$ longueur de $\partial E = \gamma([a, b])$:



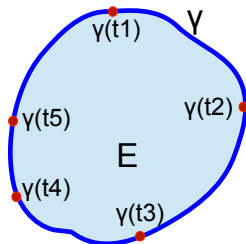
Cas 2D

$E \subset \mathbb{R}^2$: région entourée d'une courbe fermée

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$\rightarrow P(E) =$ longueur de $\partial E = \gamma([a, b])$:

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

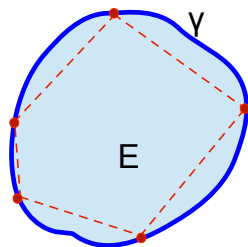


Cas 2D

$E \subset \mathbb{R}^2$: région entourée d'une courbe fermée
 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$\rightarrow P(E) =$ longueur de $\partial E = \gamma([a, b])$:

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

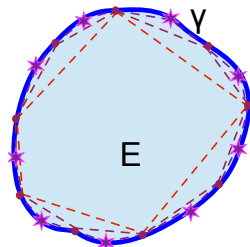


Cas 2D

$E \subset \mathbb{R}^2$: région entourée d'une courbe fermée
 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

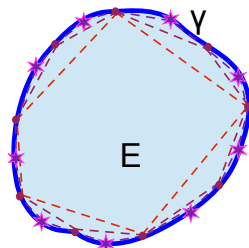
$\rightarrow P(E) =$ longueur de $\partial E = \gamma([a, b])$:

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$



Cas 2D

$E \subset \mathbb{R}^2$: région entourée d'une courbe fermée
 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.



→ $P(E)$ = longueur de $\partial E = \gamma([a, b])$:

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

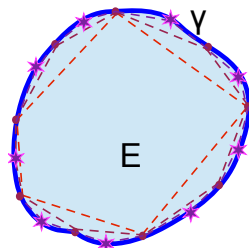
If $\gamma \in C^1$, $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$.

→ Hurwitz (1902): **inégalité isopérimétrique** dans \mathbb{R}^2 pour ensembles lisses

$$\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}^2(B) \implies P(B) \leq P(E).$$

Cas 2D

$E \subset \mathbb{R}^2$: région entourée d'une courbe fermée
 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.



$\rightarrow P(E) =$ longueur de $\partial E = \gamma([a, b])$:

$$\ell(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}.$$

If $\gamma \in C^1$, $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$.

\rightarrow Hurwitz (1902): **inégalité isopérimétrique** dans \mathbb{R}^2 pour ensembles lisses

$$\mathcal{L}^2(E) = \mathcal{L}^2(B) \implies P(B) \leq P(E).$$

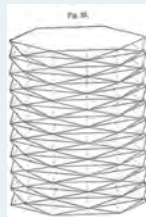
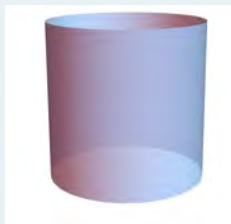
Peut-on définir le périmètre d'une surface dans \mathbb{R}^3 comme le supremum des domaines polyédriques qui se rapprochent de la surface?

Réponse: **NON!**

Schwarz (1890)

Considérons le **cylindre circulaire droit** de rayon 1 et hauteur $h > 0$. La mesure de sa surface latérale, S , devrait mesurer $2\pi h$.

Domaine polyédrique approximante: $\Pi(mn)$



Mesure de surface de $\Pi(mn)$: $P(m, n) = 2n \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{h^2 + m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}$,

If $m = n^3$: $P(m, n) \rightarrow \infty$, as $n \rightarrow \infty$.

Définition de périmètre d'ensembles mesurables dans \mathbb{R}^n :

- ① Caccioppoli (1953). Pour $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mesurable

$$P(E) = \inf \left\{ \liminf_{h \rightarrow \infty} P(\Sigma_h) : \Sigma_h \text{ dom. polyédr. approx. } |\Sigma_h \Delta E| \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

- ② De Giorgi (1954) En réfinant la définition : preuve de la propriété isopérimétrique de la sphère en n dimensions dans la classe des ensembles Lebesgue mesurables.

NB : Pour les ensembles lisses $P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$.



La solution isopérimétrique est ronde en toute dimension!

Mots clefs : symétrie, courbure constante.

Plusieurs bulles?

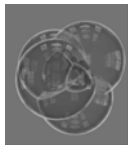


Principe des bulles de savon :

Parmi toutes les ensembles de bulles E_1, \dots, E_k avec **volumes donnés**,
minimiser le périmètre total.

Principe des bulles de savon :

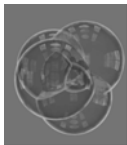
Parmi toutes les ensembles de bulles E_1, \dots, E_k avec **volumes donnés**,
minimiser le périmètre total.



Question: Comment est-ce que les bulles minimales se rencontrent?

Principe des bulles de savon :

Parmi toutes les ensembles de bulles E_1, \dots, E_k avec **volumes donnés**,
minimiser le périmètre total.



Question: Comment est-ce que les bulles minimales se rencontrent?

- Expériences du physicien Plateau
- Travaux math. Almgren, De Giorgi, Taylor, Morgan

Deux bulles peuvent se rencontrer que dans deux types d'angles!



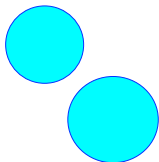
120 degrés



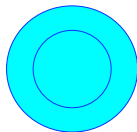
angle tétraédrique

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

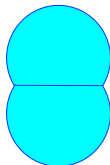
2 bulles



(a)



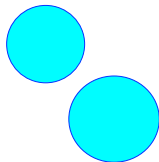
(b)



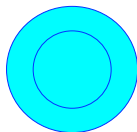
(c)

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

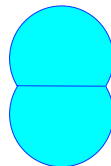
2 bulles



(a)



(b)



(c)



(b) dans la nature

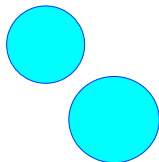
et



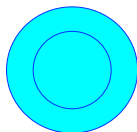
Frank Morgan

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

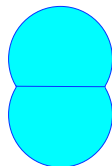
2 bulles



(a)

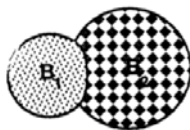


(b)



(c)

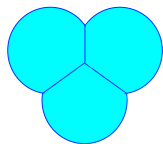
Solution : (c)



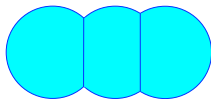
Preuve mathématique disponible! [J. Foisy et al. \(1993\)](#), [M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros \(2002\)](#).

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

3 bulles



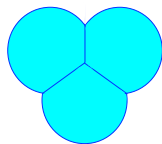
(a)



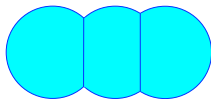
(b)

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

3 bulles



(a)



(b)

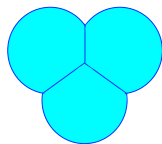
Solution : (a)



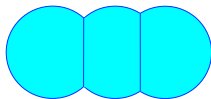
Preuve mathématique disponible qu'en dimension 2! [Wichiramala \(2003\)](#)

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

3 bulles



(a)



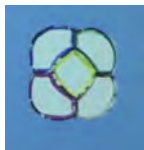
(b)

Solution : (a)

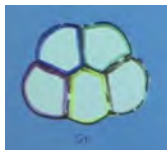


Preuve mathématique disponible qu'en dimension 2! [Wichiramala \(2003\)](#)

5 bulles



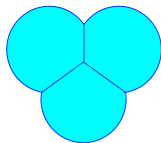
(a)



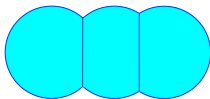
(b)

Quelle est la meilleure forme entre les suivantes pour minimiser le périmètre?

3 bulles



(a)



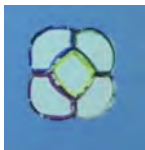
(b)

Solution : (a)

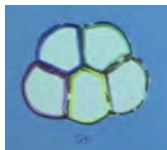


Preuve mathématique disponible qu'en dimension 2! [Wichiramala \(2003\)](#)

5 bulles



(a)



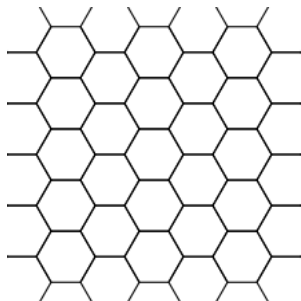
(b)

Solution : (b).

Pour 4, 5, 6, ... bulles :
preuve mathématique
NON disponible...

...sauf que pour un nombre "infini" de bulles

∞ bulles



Hales (2001)

Mes recherches : que se passe t'il si les bulles suivent d'autres règles de déplacement ?

Géométrie avec contraintes de déplacement, qui s'appelle *sous-Riemannienne*.

Géométrie avec contraintes de déplacement, qui s'appelle *sous-Riemannienne*.



composé du grec ancien *geo* ("terre") et *metro* ("mesurer")

Géométrie avec contraintes de déplacement, qui s'appelle *sous-Riemannienne*.

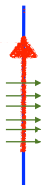
↓
composé du grec ancien *geo* ("terre") et *metro* ("mesurer")



Règles des déplacement :



Montagne :
direction
interdite



Tunnel : direction
admissible



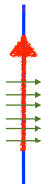
Géométrie avec contraintes de déplacement, qui s'appelle *sous-Riemannienne*.

↓
composé du grec ancien *geo* ("terre") et *metro* ("mesurer")

Règles des déplacement :



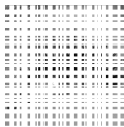
Montagne :
direction
interdite



Tunnel : direction
admissible



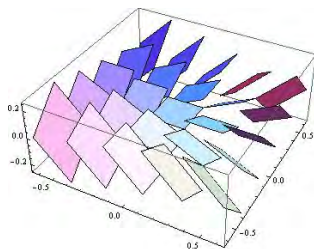
Exemple d'application : Modèle sR du
cortex visuel primaire V1



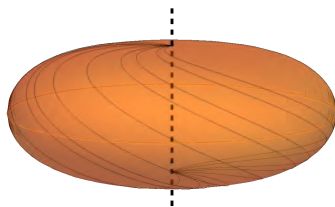
Question : quels sont les ensembles optimaux pour le périmètre anisotrope lié à la géométrie sous-Riemannienne?

Une seule bulle : (problème isopérimétrique)

Heisenberg group

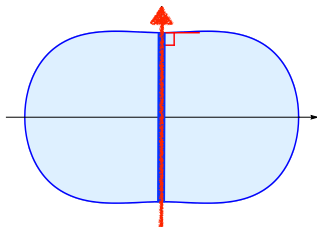
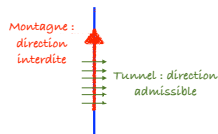


Distributions des directions
admissibles

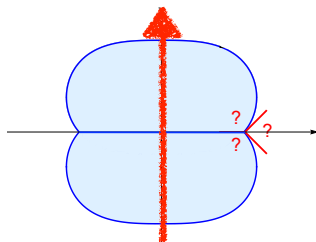


Conjecture sur la forme des
ensembles isopérimétriques
[Pansu (1982)]

Plusieurs bulles : dans le cas précédente \rightarrow



1 angle plat, 2 droits



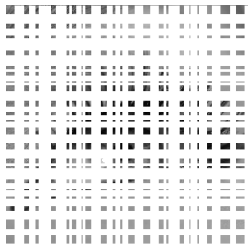
Angles qui dépendent du volume
des bulles.

The background of the slide is a vibrant, out-of-focus field of colorful bubbles and bokeh lights. The bubbles are in various sizes and colors, including shades of purple, blue, green, and yellow, creating a shimmering, celebratory atmosphere. The bokeh lights are soft, circular glows in similar colors, scattered across the scene. A solid teal horizontal bar is positioned at the top of the slide. A teal rounded rectangular button is centered in the lower half of the slide, containing the text 'Merci!'.

Merci!

Un modèle sR du cortex visuel primaire V1

- Travaux neuro-physiologiques de Hubel et Wiesel (Prix Nobel '81)
- Modèle sR du cortex visuel primaire V1: Petitot, Citti, Sarti, Agrachev, Boscain, Gauthier, Prandi.
- Reconstruction d'images : Intégration numérique de la *diffusion hypoelliptique* associé à V1



Boscain, Citti, Gauthier, Petitot, Prandi, Sarti