ESPACES MÉTRIQUES ET CONVERGENCE DE GROMOV-HAUSDORFF

1. Espaces métriques : définitions et exemples

Définition 1.1. Soit X un ensemble quelconque. Une fonction : $X \times X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est une *métrique* si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout x, y, z dans X.
(i) Positivité : $d(x,y) > 0$ si $x \neq y$ et $d(x,x) = 0$.
(ii) Symétrie : $d(x,y) = d(y,x)$.
(iii) Inégalité triangulaire : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une métrique, noté (X,d). Pour x, y dans X, on appelle $d(x,y)$ la distance entre x et y.

Quelques exemples

(1) La droite des réels $\mathbb{R}$ munie de la distance $d(x,y) = |x-y|$ est un espace métrique. De même $\mathbb{R}^n$ avec la distance
$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$
Cette dernière s'appelle métrique euclidienne.

(2) Tout espace vectoriel muni d'une norme $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ est un espace métrique, avec la distance $d(v,w) = ||v-w||$. Sur $\mathbb{R}^n$, on peut par exemple considérer la norme $||\cdot||_\infty$:
$$||(x_1,\dots,x_n)||_\infty = \max\{x_1,\dots,x_n\}.$$
La métrique euclidienne est aussi associée à la norme euclidienne, qu'on noter pour simplifier $||\cdot||$.

(3) Étant donné un espace métrique X et un sous-ensemble S, il est possible de définir une métrique sur S en restreignant la fonction d à $S \times S$. Comme l'exemple suivant le montre, un sous-ensemble peut être aussi muni d'une métrique "intrinsèque", qui ne dépend pas de la métrique de l'espace ambiant et ne correspond pas forcément avec celle-ci.

Considérons le cercle unitaire $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire l'ensemble des points du plan à distance de l'origine égale à 1. On peut considérer la métrique euclidienne restreinte sur $\mathbb{S}^1$ ou alternativement, définir la distance entre deux points de $\mathbb{S}^1$ comme la longueur de l'arc de cercle le plus court qui les unit.

(4) La sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension n est le sous-ensemble des points de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui ont norme unitaire. La *métrique angulaire* sur $\mathbb{S}^n$ est définie par :
$$d(x,y) = \arccos\langle x,y\rangle,$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire euclidien. Cela signifie que la distance est déterminée par l'angle euclidien entre deux vecteurs unitaires. Si on considère le cas bidimensionnel, la distance angulaire est la longueur de l'arc d'équateur le plus court qui connecte x et y (en dimension $n \geq 2$, on remplace les équateurs par les "grands cercles").

(5) Soit Σ une surface régulière dans $\mathbb{R}^3$. Rappelons qu'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ est une surface régulière si (en gros) pour tout point $p \in \Sigma$ il existe un voisinage ouvert de p qui est homéomorphe à un disque dans $\mathbb{R}^2$. Il est possible de définir un espace tangent $T_p\Sigma$ en tout point p de Σ : c'est l'espace vectoriel bidimensionnel constitué des vecteurs tangents aux courbes qui passent par p. $\mathbb{R}^3$ induit un produit scalaire et donc une forme quadratique $\mathbb{I}_p$, la *première forme fondamentale*, sur l'espace tangent $T_p\Sigma$; cela permet de définir la longueur des courbes sur Σ et par conséquent une métrique sur Σ.

Plus précisément, soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui contient l'origine et $\varphi : U \to \Sigma$ une carte locale telle que $\varphi(0,0) = p$. La première forme fondamentale est une forme quadratique sur $T_p\Sigma$, et peut être représentée par une matrice (2,2) dans la base $\mathcal{B} = \{\varphi_u, \varphi_v\}$. Un vecteur w de $T_p\Sigma$ est associé à une courbe $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Sigma$, $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ telle que $\alpha'(0) = w$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_p(w) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

où $E = (\varphi_u)^2$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ et $G = (\varphi_v)^2$. Donc la première forme fondamentale $\mathbb{I}_p$ est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice :

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les coefficients E, F et G ne sont pas forcément ceux du produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$, et ils dépendent du point p. La norme de w dans $T_p\Sigma$ est donnée par :

$$||w||_\Sigma = \sqrt{\mathbb{I}_p(w)} = \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

Soit Γ une coure tracée sur Σ, et $\gamma : I \to \Sigma$ une paramétrisation de Γ telle que $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$. La *longueur* de Γ est définie par :

$$L(\Gamma) = \int_I ||\gamma'(t)||_\Sigma dt.$$

La *distance intrinsèque* de Σ est définie par :

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma), \gamma : [0,1] \to \Sigma \text{ courbe tracée sur } \Sigma \text{t.q.} \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}.$$

Cette distance n'est pas forcément la distance euclidienne induite de $\mathbb{R}^3$ sur Σ. La distance angulaire de $\mathbb{S}^2$ dans l'exemple précédent est la distance intrinsèque de la sphère en tant que surface régulière.

(6) Les *variétés Riemanniennes* peuvent être vues comme un analogue des surfaces régulière en dimension quelconque n. Pour une variété Riemannienne de dimension n, il est possible de définir un espace tangent de façon similaire (on obtient un espace vectoriel de dimension n) et un produit scalaire sur cet espace, qui s'appelle *métrique Riemannienne*. Cela permet de définir la longueur des courbes et une distance intrinsèque... et c'est le sujet d'un cours de Master 2.

Définition 1.2. Le *diamètre* d'un espace métrique est défini par :

$$\mathrm{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x,y)$$

.

Par exemple, le cercle S^1 muni de la métrique euclidienne a diamètre égal à 2 ; muni de sa métrique angulaire, il a diamètre π.

Définition 1.3. Une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est une *semi-métrique* si elle satisfait toutes les propriétés de la définition précédente sauf l'implication : $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Exemple : Soit $p \geq 1$ et considérons l'ensemble $\tilde{L}^p(\mathbb{R})$ des fonctions réelles intégrables à la puissance p (selon Lebesgue). La fonction $d_p : \tilde{L}^p(\mathbb{R}) \times \tilde{L}^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$d_p(f, g) = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une semi-métrique. En effet, $d_p(f, g) = 0$ si et seulement si $f = g$ presque partout. Cela définit une relation d'équivalence, et d_p est une métrique sur l'ensemble $L^p(\mathbb{R})$ des classes d'équivalence des fonctions intégrables à la puissance p.

Proposition 1.4. *Soit d un semi-métrique sur X. On introduit une relation d'équivalence $\sim_d$: pour tout $x, y \in X$ on a $x \sim_d y$ si et seulement si $d(x, y) = 0$. La projection $\hat{d}$ de d sur le quotient $\hat{X} = X/\sim_d$ est bien définie et $(\hat{X}, \hat{d})$ est un espace métrique.*

Définition 1.5. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : X \to Y$ *préserve les distances* si pour tout $x, y \in X$

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$$

Une application bijective qui préserve les distances est une *isométrie*. Deux espaces se disent isométriques s'il existe une isométrie de l'un dans l'autre.

Définition 1.6. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Un application $f : X \to X$ se dit *lipschitzienne* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1, x_2 \in X$ on a

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2)$$

. Une constante C pour laquelle l'inégalité précédente est vérifiée s'appelle *constante de Lipschitz* de f. La constante de Lispchitz minimale est la *dilatation* de f et est notée $\mathrm{dil}(f)$.

Proposition 1.7. *La composition de deux fonctions lipschitziennes est une fonction lipschitzienne. Plus précisément, si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux fonctions lipschitziennes, $g \circ f : X \to Z$ est une fonction lipschitzienne qui satisfait $dil(g \circ f) \leq dil(f) \cdot dil(g)$.*

Métriques et topologie.

Définition 1.8. Soit X un espace métrique, x un point de X et r un réel strictement positif. La *boule ouverte* de centre x et rayon r est l'ensemble des points à distance *strictement inférieure* à r de x. On note $B_r(x)$. La *boule fermée* $\bar{B}_r(x)$ est l'ensemble des points à distance *inférieure ou égale* à r de x.

Exemple : Si on considère $\mathbb{R}^n$ avec la norme $||\cdot||_\infty$, une boule est loin d'être ronde. Essayez de la dessiner par exemple dans $\mathbb{R}^2$.

La topologie associée à une métrique est définie de la façon suivante : un ensemble U est un ouvert si et seulement si pour tout x dans U il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x) \subset U$. Il est possible de montrer qu'un ensemble est ouvert s'il peut être représenté comme l'union (possiblement infinie) de boules ouvertes.

Définition 1.9. Une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points dans un espace topologique *converge* à un point $x \in X$ si pour tout voisinage de U de x il existe un naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in U$. On note $x_n \to x$; le point x est une *limite* de la suite.

Proposition 1.10. *Soit X et Y deux espaces métriques. Alors :*

(1) Une suite dans X a au plus une limite.

(2) Un point $x \in X$ est un point d'accumulation pour un ensemble $S \subset X$ si et seulement s'il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $x_n \in S$ pour tout n et $x_n \to x$. En particulier S est fermé si et seulement s'il contient toutes les limites de suites incluses dans S.

(3) Une application $f : X \to Y$ est continue en un point $x \in X$ si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$ dans Y pour toutes les suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui convergent à x.

Proposition 1.11. *Une fonction lipschitzienne entre deux espaces métriques est continue.*

Espaces métriques complets, espaces métriques compacts.

Définition 1.12. Une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans un espace métrique X est une *suite de Cauchy* si $d(x_n, x_m) \to 0$ pour n, m qui tendent à l'infini, c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$ on a $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Un espace métrique est *complet* si toute suite de Cauchy converge.

Exemple : $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est complet, mais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec la même distance ne l'est pas.

Proposition 1.13. *Soit X un espace métrique et X' un sous-ensemble dense dans X. Soit Y un espace métrique complet et $f : X' \to X$ une application Lipschitzienne. Il existe une unique application continue $\tilde{f} : X \to Y$ telle que $\tilde{f}|_{X'} = f$. En outre, $\tilde{f}$ est lipschitzienne avec la même constante de Lipschitz que f.*

Théorème 1.14. *Soit X un espace métrique. Alors il existe un espace métrique complet $\tilde{X}$, qu'on appelle la* complétion *de X, tel que X est un sous-espace dense de $\tilde{X}$. Il est essentiellement unique dans le sens suivant : si $\tilde{X}'$ est un autre espace métrique avec les mêmes propriétés, alors il existe une isométrie entre $\tilde{X}$ et $\tilde{X}'$ qui restreinte à X est l'identité.*

Par exemple, la droite réelle $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$.

Définition 1.15. On dit qu'un espace métrique X est *compact* si pour tout recouvrement ouvert de X il existe un collection finie d'ouverts du recouvrement qui couvre X.

Remarque : Il ne faut pas penser à un ensemble compact comme un ensemble "fermé et borné". En effet, cela est vrai dans $\mathbb{R}^n$, mais si on considère un espace de Banach de dimension infinie, un important résultat d'analyse fonctionnelle nous dit que la boule unitaire fermée n'est *pas* compacte. Nous voulons considérer des espaces métriques bien plus généraux que $\mathbb{R}^n$; c'est pour cela que nous aurons besoin d'autres définitions équivalentes de la compacité. En particulier, nous nous servirons de la notion d'*ε-réseau.*

Définition 1.16. Soit X un espace métrique, $S \subset X$ et x un point de X. On définit la distance de x à S par :

$$\operatorname{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y).$$

Définition 1.17. Soit X un espace métrique, S un sous-ensemble de X et $\varepsilon > 0$. On dit que S est un *ε-réseau* si pour tout $x \in X$ on a $\operatorname{dist}(x, S) \leq \varepsilon$. On dit que X est *totalement borné* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ε-réseau fini.

Théorème 1.18. *Soit X un espace métrique. Les suivants sont équivalents :*

(1) X est compact

(2) Toute suite dans X possède une sous-suite convergente.

(3) Tout sous-ensemble infini de X possède un point d'accumulation.

(4) X est complet et totalement borné.

Théorème 1.19. *Un espace métrique compact ne peut pas être isométrique à un de ses sous-ensembles propres. Autrement dit, s'il existe une application $f : X \to X$ qui préserve la distance, $f(X) = X$ (f est surjective).*

Définition 1.20. Un espace métrique se dit séparable s'il admet un sous-ensemble dense et dénombrable.

Proposition 1.21. *Tout espace métrique compact est séparable.*